3 数論幾何学のモチーフ理論

図形を使って数を調べる数論幾何において重要な役割を果たす「モチーフ理論」を拡張

NTT コミュニケーション科学基礎研究所（以下、CS 研）に基礎数学研究センタが新設された際に招聘されたのが、整数論、数論幾何を専門とし、「モチーフ理論」の研究者として知られる宮﨑弘安氏だ。本稿では同氏の研究成果である「一般化モチーフ理論」について紹介する。

図形を使って数を調べる数論幾何

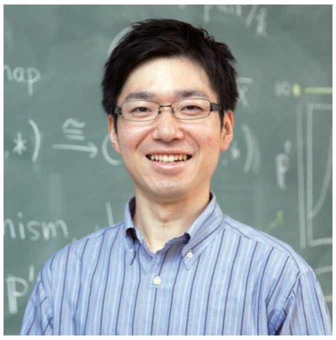
モチーフ理論は数論幾何学という数学の分野における研究テーマの 1 つだ。数論幾何学では整数や素数など「数」の性質、また多項式など「代数」の性質を幾何学的な手法を使って調べる。より簡単な表現を使えば「図形を使って数を調べる」学問と言える。

「図形」の簡単な例を図 1 に示す。「$x^2+y^2=1$」という式の解を実数、有理数、整数それぞれについて図示したグラフだ。このグラフを図形とみなして研究するのが数論幾何学の基本的な手法となっている。

解の集合を示す図形（代数多様体）とその見方（コホモロジー）

数論幾何学では多様な数の範囲で方程式の解を考え、それらをうまく総合するということをよく行う。たとえば「$x^2+y^2=1$」という方程式を解く際、一般的には解の範囲を実数、有理数、整数のように分ける必要があるが、数論幾何学ではそのすべての情報を含む抽象的な図形を調べることで方程式の解を調べる、という手法を利用する。この抽象的な図形のことを「代数多様体」と呼んでいる。

ただし代数多様体は高次元の図形であることが多く、ほとんどの場合は人が見て把握できるものではない。そのままでは「図形を使って数を調べる」こともできないが、実はこのような「目に見えない」図形をも調べるための優れた手法がある。



NTT コミュニケーション科学基礎研究所
メディア情報研究部
情報基礎理論研究グループ
兼 基礎数学研究センタ
研究主任　宮﨑 弘安氏

「代数多様体は元の方程式とほぼ 1 対 1 に近い情報を持っていますので、代数多様体を調べれば方程式のことがわかると言えます。ただし代数多様体は抽象的な図形で、実際に目で見て調べたりすることができません。そこで代数多様体を、ベクトル空間というわかりやすい図形に置

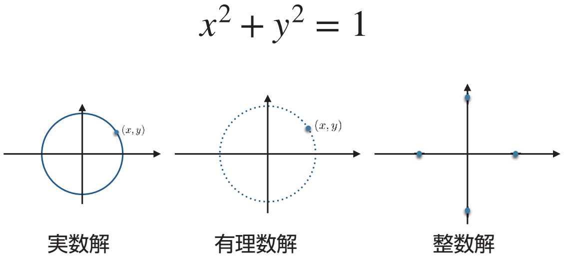


図 1　図形を使って数を調べる

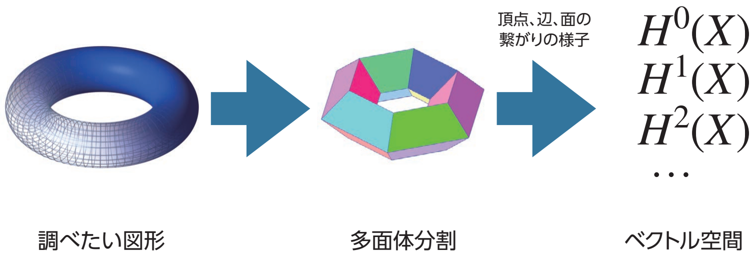


図 2　コホモロジーの例

き換えて調べる、という手法がよく使われます。このようにすることで、代数多様体が持つ情報を、ベクトル空間の次元や行列の行列式といった、数値的な情報として取り出すことができます。代数多様体をベクトル空間に置き換える方法には、代数多様体をどの側面から調べるかによって、様々な方法があります。その１つ１つを『コホモロジー』と呼びます。コホモロジーは、代数多様体をある側面から調べるための見方（観測方法）とみなせます。

たとえば図形上の関数に着目すると、図形の形が大まかにわかります。図形上に 1/z という関数がある場合、z=0 では解が定まらないはずですから、その図形には z=0 のところで穴が空いているはずです。しかも、関数は和・差・定数倍などの計算ができるため、ベクトル空間になっています。これがコホモロジーの一例です。」

コホモロジーはもともと、数論幾何が生まれる以前から、複雑な図形や空間を調べる手法として深く研究されていた。方程式を代数多様体という図形に置き換えることで、コホモロジーの手法が使えるようになったことが、数論幾何の強みのひとつだ。

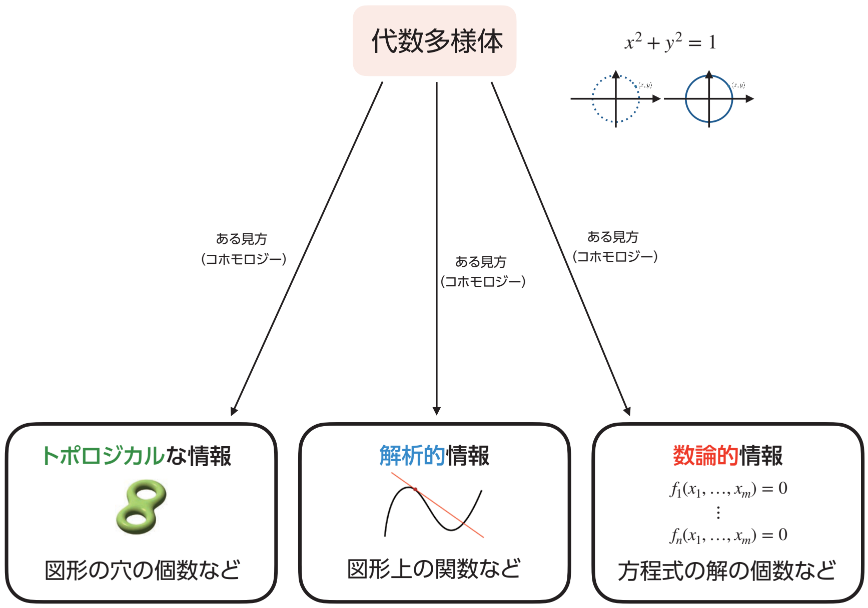
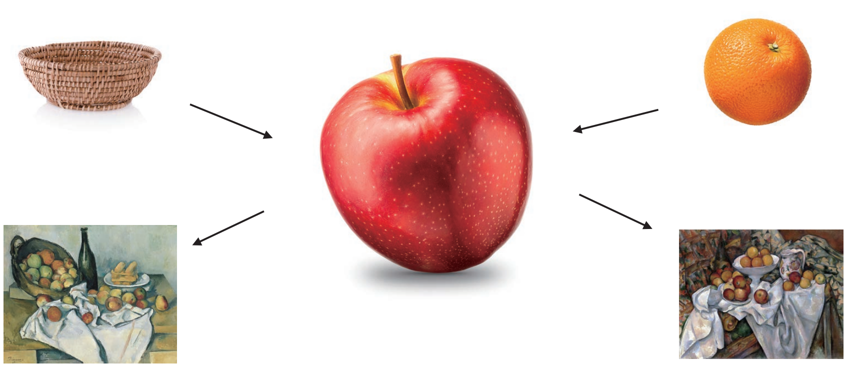


図３　代表的なコホモロジーの分類

もう１つのコホモロジーの例を図２に示す。調べたい図形を点・辺・面などの単純な要素に分割し、それらのつながりの情報を使ってベクトル空間を作ることができる。実は、この情報だけから、図形がどのような形状をしているか（ドーナツの穴の個数など）が大まかにわかる。図２では目に見える図形を例に挙げているが、高次元の目に見えない図形を調べる時には、組み合わせの情報だけで図形を調べられるコホモロジーは、特に威力を発揮する。

「コホモロジーを作る方法はいくつもあり、それぞれが、代数多様体の異なる側面からの姿を見せてくれます。しかし、面白いことに、全く無関係に見える２つのコホモロジーが関係していることもあります。たとえば、図形の穴の個数と、方程式の有理数での解の個数の間に深い関係があることがわかっています（図３）。私の研究はさまざまなコホモロジーを分類し、異なるコホモロジーの間に関係性を見いだすことで、代数多様体の本質的な理解に役立つ方法を見つけることです。」（宮﨑氏）



『リンゴの籠のある静物』

『リンゴとオレンジのある静物』

図４　「絵画とモチーフ」に触発され考案されたモチーフ理論

モチーフ理論

コホモロジーを使うことによって代数多様体を見ることが可能とはいえ、それは見え方の１つであり、間接的な見方と言える。「高次元の図形は見ることができないからと諦めるのではなく、なるべく間接的な手法に頼らずに図形の特徴を表現したいというのは自然な考えでしょ

う」と宮﨑氏は言う。このような考え方を実現することを目指すのが、宮﨑氏が研究テーマとしている「モチーフ理論」だ。

画家がリンゴをモチーフとする絵画を描くとき、籠やオレンジなどと対比させることによってリンゴを明確に見せようとすることがある。これと同様にさまざまな視点から対象を見ることによりその本質、すなわちモチーフに迫る（図４）という話に触発され、提唱者である数学者グロタンディークがモチーフ理論と名付けたとされている。

コホモロジーを調べることは、代数多様体をある視点から見ることとみなせる。さまざまな視点（コホモロジー）を束ねて統合することで、代数多様体の本質（モチーフ）に迫ることがモチーフ理論の目標の１つだ。

グロタンディークが提唱したモチーフ理論は、その後、多くの数学者により発展させられた。中でもヴォエヴォドスキの提唱した理論は、多くのコホモロジーを統合する理論として成功をおさめた（図５）。

ヴォエヴォドスキは自身の理論を用いて、２つのコホモロジー（ミルナー K 群とエタールコホモロジー）の間の深い関係を示すミルナー予想（およびブロック–加藤予想）を解決し、フィールズ賞を受賞するなどの華々しい成果をあげている。

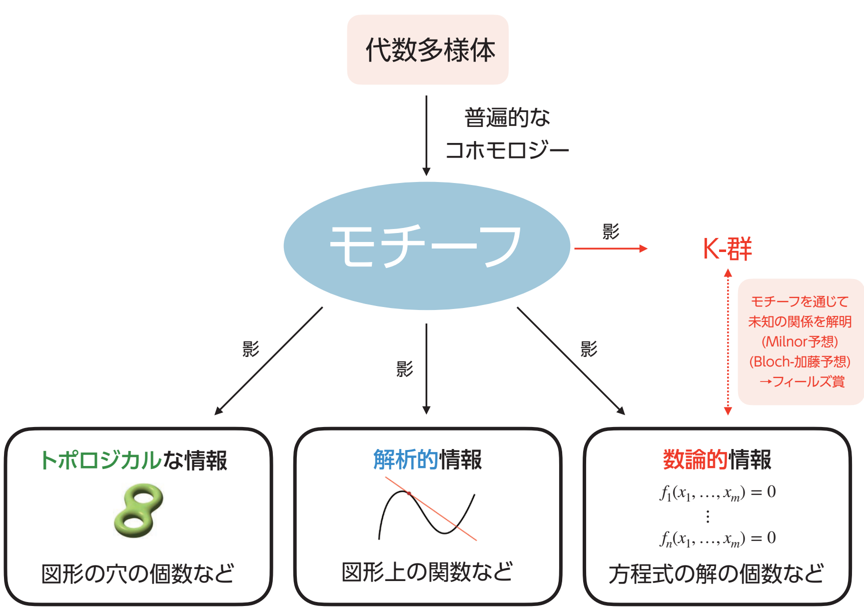


図５　普遍的なコホモロジーであるモチーフ

モチーフ理論の限界

しかしヴォエヴォドスキのモチーフ理論にも大きな弱点がある。従来のモチーフ理論では、「ホモトピー不変性」という性質を持つ、一部のコホモロジーしか束ねることができないためだ。このために、代数多様体の持つ重要な情報が失われてしまう。

「コホモロジーの説明で例として使った 1/z という関数において z が２乗、３乗といったように高次になることを『極の重複度』と表現します。数論幾何学ではよく注目する情報です。このような重複度の情報を捕捉できないことがヴォエヴォドスキのモチーフ理論の問題です。」（宮﨑氏）

従来のモチーフ理論の弱点をより単純化して説明するため、図６に２つのグラフを示す。いずれも x=0、y=0 の点で２つの線が交わっている。「y=x2」における x=0 には重複度があるといったように、２つの点は代数多様体としては全く異なる性質のものだが、従来のモチーフ理論では区別できない。代数多様体を調べるのに必要な情報が失われてしまうことを意味する。

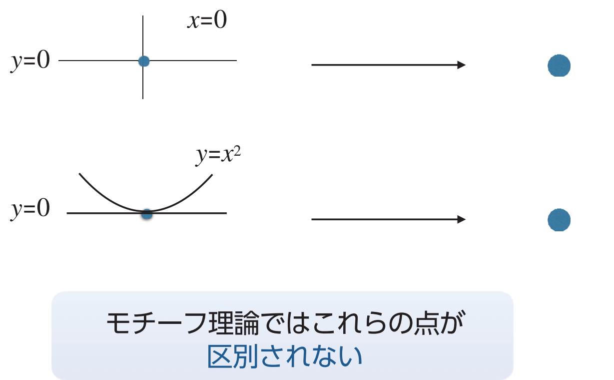


図６　モチーフの課題

従来のモチーフ理論を拡張し「一般化モチーフ理論」を提唱

宮﨑氏は従来のモチーフ理論が抱える問題を解決するため、ヴォエ

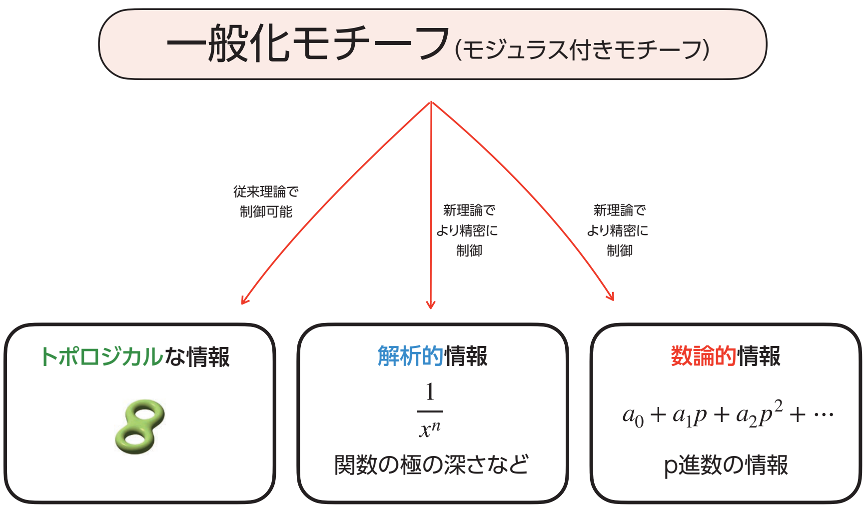


図７　一般化モチーフ

ヴォドスキの理論を特殊な場合として含めることができる一般化に取り組んできた。それが「一般化モチーフ理論」だ。従来のモチーフ理論では無視されていた重複度を情報として新たに取り込み、理論全体を拡張することがポイントとなる。

「コホモロジーは『位相』という概念と『層』という概念をうまく組み合わせることにより生成できます。モチーフも一種のコホモロジーなので、位相と層をうまく選択することでモチーフを生成できるというのが、ヴォエヴォドスキのモチーフ理論です。私が共同研究者の Bruno Kahn 氏、齋藤秀司氏、山崎隆雄氏と行ったのは、位相と層それぞれの概念をうまく拡張することです。これにより、ホモトピー不変性を満たさないコホモロジーも表現しうる理論を構築しました。現在知られている重要なコホモロジーは、一般化モチーフ理論で制御可能と考えています。一般化モチーフ理論を用いれば、代数多様体のより多くの情報を得ることができます。説明する際は簡潔に一般化モチーフと呼んでいますが、2021 年に投稿し 2022 年に出版された論文では『モジュラス付きモチーフ』と呼んでいます。」(宮崎氏)

引き続き一般化モチーフ理論の実証に取り組む

宮崎氏は自ら一般化モチーフ理論の実証を進めている。これまでに解析的情報や数論的情報に注目したコホモロジーなど、代表的なコホモロジーを表現できることを確認している。

「数論幾何のコホモロジーのほとんどを統合できるように理論をデザインしました。実際に統合できていることの検証を、共同研究者たちと現在ひとつひとつ進めています。私たちが行った拡張により、モチーフ理論がより広く活用されるようになることに貢献できれば嬉しい、という思いで取り組んでいます。」(宮崎氏)

基礎数学の分野で世界的に認められるような研究を

基礎数学研究センタは NTT としてだけでなく民間企業全般としても珍しい基礎数学専門の研究組織として設置された。早い段階で参加した宮﨑氏は、その立ち上げにも貢献してきた。自らの研究を進める一方で数学研究のための環境整備や、研究所における各種イベントや、社外から数学者を招いてのセミナーの開催など、精力的に活動している。同センタにおけるこれまでの活動と、今後に向けた抱負について、宮﨑氏は次のように述べている。

「当初はメンバーが少なく個々に研究を頑張るという状態でしたが、メンバーが増えた現在はディスカッションも盛んに行っています。CS 研にはもともと純粋な数学にも興味のある研究者が多数在籍しており、私が主催している数学セミナーにもたくさんのメンバーが参加してくれています。CS 研以外の研究者の方々も多数参加いただけており嬉しく思っています。基礎数学研究センタのミッションは、センタのホームページにもある通り、好奇心と自由な発想に基づく探究を通して、未知の数学的真理を明らかにすることです。

私の中心テーマであるモチーフ理論の研究をさらに深めていくとともに、センタに所属する数学者や、NTT の様々な分野の研究者と交流を深めることも重視しています。モチーフ理論にもみられるように、一見まったく異なる事柄の間の関係を見出すことは、数学の得意技です。基礎数学研究センタでの活動を通して、NTT 研究所の様々な研究領域を結びつけ、新たな研究を創出することができれば、これほどうれしいことはありません。」